第31講　整数問題(2)

1 [1]　n を自然数とするとき，$\dfrac{4n+1}{2n-1}$ は整数値 a をとるものとする．a の最大値を求めよ．

[2]　(1)　$xy=2x+2y+2$ を満たす自然数 x，y の組，および整数 x，y の組はそれぞれ何組あるか．ただし，$x \geqq y$ とする．

(2)　$\sqrt{n^2+27}$ が整数であるような自然数 n をすべて求めよ．

＜ Note ＞

2　3で割ると2余り，5で割ると3余り，11で割ると9余る整数のうちで，1000を越えない最大のものを求めよ．

＜ Note ＞

3　方程式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}=\dfrac{4}{3}$　……①　を満たす自然数の組　$(x,\ y,\ z)$ について考える．

(1)　$x=1$　のとき，正の整数 y，z の組をすべて求めよ．

(2)　x のとり得る値の範囲を求めよ．

(3)　方程式①を解け．

< Note >

第 31 講　整数問題(2)

［1］ $\dfrac{n+32}{n+2}$ が整数となる正の整数 n は［ア］個ある．

［2］ $l \leqq m \leqq n$ のとき $\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{3}{2}$ ……① を満たす自然数の組 $(l,\ m,\ n)$ の個数を求めよう．

$l,\ m$ は自然数で $l \leqq m$ より $\dfrac{1}{m} \leqq \dfrac{1}{l}$ である．また $l,\ n$ は自然数で $l \leqq n$ より $\dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{1}{l}$ である．

よって①から $\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{l}$ つまり $\dfrac{3}{2} \leqq \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{l}$ であることより，l のとり得る最大値は $l=$［ウ］であることがわかる．$l=1$ のとき ①は $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ より これを満たす $(m,\ n)$ の組は［カ］組ある．l のとり得る値を順に①に代入することにより，①を満たす自然数 $(l,\ m,\ n)$ の組数は全部で［キ］組である．

＜ Note ＞

第31講　整数問題(2)

1 ［1］ n を自然数とするとき，$\dfrac{4n+1}{2n-1}$ は整数値 a をとるものとする．a の最大値を求めよ．	

$\dfrac{4n+1}{2n-1}=2+\dfrac{3}{2n-1}$　これが整数値 a をとるのは，$2n-1$ が3の約数のとき．

また，$n \geqq 1$ より $2n-1 \geqq 1$　よって　$2n-1=1,\ 3$　つまり $n=1,\ 2$　に限られる．

このときそれぞれ $a=5,\ 3$　したがって，a の最大値は **5**

1 ［2］ (1)　$xy=2x+2y+2$ を満たす自然数 x，y の組，および整数 x，y の組はそれぞれ何組あるか．ただし，$x \geqq y$ とする． (2)　$\sqrt{n^2+27}$ が整数であるような自然数 n をすべて求めよ．	

(1)　$xy=2x+2y+2$ より

$xy-2x-2y-2=0$　$(x-2)(y-2)=6$

$x \geqq y$　より　$x-2 \geqq y-2$

よって　$(x-2,\ y-2)=(6,\ 1),\ (3,\ 2),\ (-1,\ -6),\ (-2,\ -3)$

したがって　$(x,\ y)=(8,\ 3),\ (5,\ 4),\ (1,\ -4),\ (0,\ -1)$

ゆえに　自然数 x，y の組は **2組**　整数 x，y の組は **4組**

(2)　$\sqrt{n^2+27}=k$　(k は0以上の整数）とおく．

$n^2+27=k^2$　$k^2-n^2=27$　$(k+n)(k-n)=27$

n は自然数より　$k+n>k-n$　また　$k+n>0$

よって　$(k+n,\ k-n)=(27,\ 1),\ (9,\ 3)$

したがって　$(k,\ n)=(14,\ 13),\ (6,\ 3)$　ゆえに　$\boldsymbol{n=13,\ 3}$

2　3で割ると2余り，5で割ると3余り，11で割ると9余る整数のうちで，1000を越えない最大のものを求めよ．	

求める整数を N とすると，整数 a，b，c を用いて

$N=3a+2$　……①　$N=5b+3$　……②　$N=11c+9$　……③　と表せる．

①，②より

$3a+2=5b+3$　$3(a-2)=5(b-1)$

3，5は互いに素より，$a-2$ は5の倍数

よって　$a-2=5k$　つまり　$a=5k+2$（k は整数）と表せる．

このとき　①より　$N=3(5k+2)+2=15k+8$　……①′

これと③より

$15k+8=11c+9$

$15(k-3)=11(c-4)$

15，11 は互いに素より，$k-3$ は 11 の倍数

よって　$k-3=11l$　つまり　$k=11l+3$　（l は整数）と表せる．

このとき　①′より　$N=15(11l+3)+8=165l+53$

これが表す 1000 を超えない最大の整数は　$N=165\cdot 5+53=\mathbf{878}$

3　方程式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}=\dfrac{4}{3}$　……①　を満たす自然数の組　$(x,\ y,\ z)$ について考える．

(1)　$x=1$　のとき，正の整数 y，z の組をすべて求めよ．

(2)　x のとり得る値の範囲を求めよ．

(3)　方程式①を解け．

---

(1)　$x=1$ のとき　①より　$\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}=\dfrac{1}{3}$

$2yz-2y-3z=0$　　$(2y-3)(z-1)=3$

$z\geqq 1$ より　$z-1\geqq 0$　　よって　$(2y-3,\ z-1)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$

したがって　$\boldsymbol{(y,\ z)=(2,\ 4),\ (3,\ 2)}$

(2)　$y\geqq 1$，$z\geqq 1$ であることより，①から

$$\frac{4}{3}-\frac{1}{x}=\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}\leqq\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 1}=\frac{5}{6}\quad\cdots\cdots②$$

よって　$\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{x}\leqq\dfrac{5}{6}$　　$\dfrac{1}{x}\geqq\dfrac{1}{2}$　　$x\leqq 2$　　したがって　$\boldsymbol{1\leqq x\leqq 2}$

(3)　$x=2$ のとき②で等号が成り立つので　$(y,\ z)=(1,\ 1)$

これと　$x=1$ のときの(1)の結果より

$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 4),\ (1,\ 3,\ 2),\ (2,\ 1,\ 1)}$

第 31 講　整数問題(2)

［1］ $\dfrac{n+32}{n+2}$ が整数となる正の整数 n は **ア** 個ある．

$\dfrac{n+32}{n+2}=1+\dfrac{30}{n+2}$　これが整数となるのは $n+2$ が 30 の約数のときである．

$n+2\geqq 3$　　30 の約数の中で 3 以上のものは　3，5，6，10，15，30 の 6 個．

よって，$\dfrac{n+32}{n+2}$ が整数となる正の整数 n の個数は **6** 個である．

［2］ $l\leqq m\leqq n$ のとき　$\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{3}{2}$　……①　を満たす自然数の組 $(l,\ m,\ n)$ の個数を求めよう．

l，m は自然数で　$l\leqq m$　より　$\dfrac{1}{m}\leqq\dfrac{1}{l}$ である．また l，n は自然数で　$l\leqq n$　より　$\dfrac{1}{n}\leqq\dfrac{1}{l}$ である．

よって①から　$\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\leqq\dfrac{\boxed{イ}}{l}$　つまり　$\dfrac{3}{2}\leqq\dfrac{\boxed{イ}}{l}$　であることより，l のとり得る最大値は $l=$ **ウ** であることがわかる．$l=1$ のとき　①は

$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$　より　これを満たす $(m,\ n)$ の組は **カ** 組ある．l のとり得る値を順に①に代入することにより，①を満たす自然数 $(l,\ m,\ n)$ の組数は全部で **キ** 組である．

$l\leqq m\leqq n$ より

$\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\leqq\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{l}=\mathbf{\dfrac{3}{l}}$　よって　$\dfrac{3}{2}\leqq\dfrac{3}{l}$　より　$l\leqq 2$

よって l のとり得る最大値は　$l=\mathbf{2}$　であることがわかる．

$l=1$ のとき　①より　$1+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{3}{2}$　つまり　$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

$mn-2m-2n=0$　　$(m-2)(n-2)=4$

$m\geqq 1$，$n\geqq 1$　より　$m-2\geqq -1$，$n-2\geqq -1$　　また，$m\leqq n$ であることより

$(m-2,\ n-2)=(1,\ 4)$，$(2,\ 2)$　　よって　$(m,\ n)=(3,\ 6)$，$(4,\ 4)$　の **2** 組．

$l=2$ のとき　①より　$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{3}{2}$　つまり　$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=1$

$mn-m-n=0$　　$(m-1)(n-1)=1$

$m\geqq 1$，$n\geqq 1$　より　$m-1\geqq 0$，$n-1\geqq 0$　　また，$m\leqq n$ であることより

$(m-1,\ n-1)=(1,\ 1)$　　よって　$(m,\ n)=(2,\ 2)$　の 1 組．

以上より，①を満たす自然数 $(l,\ m,\ n)$ の組は全部で **3** 組である．